Représentations linéaires du groupe $\mathcal{SO}_3$

J'ai appris que les représentations du groupe orthogonal $\mathcal{SO}_3$ jouent un grand rôle en mécanique quantique, c'est pourquoi j'ai choisi de les étudier. Pour cela j'ai dans un premier temps été amené à m'intéresser plus généralement aux représentations de groupes compacts. Comme pour les groupes finis, il est possible de décomposer une représentation d'un groupe compact en représentations irréductibles, ce qui généralise le théorème de Maschke. J'ai commencé par appliquer cette décomposition dans un cas simple : celui de $\mathcal{SO}_2$ qui est commutatif. Pour étudier les représentations de $\mathcal{SO}_3$, je suis ensuite passé par $\mathcal{SU}_2$ dont $\mathcal{SO}_3$ est le quotient par $\{\pm I_2\}$. Après avoir trouvé une représentation irréductible de $\mathcal{SU}_2$ de chaque degré, je n'ai conservé que celles compatibles avec le passage au quotient pour me ramener à $\mathcal{SO}_3$, soit celles de degré impair.

Plan

1 Décomposition des représentations d'un groupe compact

On cherche ici à décomposer une représentation linéaire d'un groupe $(G, *)$ dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) en représentations linéaires *irréductibles*. Une représentation ρ de G sur F est dite irréductible lorsque les seuls sous-espaces de F stables par tous les $\rho(g), g \in G$ sont F et $\{0\}$.

Dans le cas où G est un groupe fini, on dispose grâce à l'astuce euclidienne du théorème de décomposition suivant :

Théorème *(de Maschke)*

> Si G est un groupe fini, pour toute représentation $\rho : G \to \mathcal{GL}_{\mathbb{K}}(V)$, il existe une décomposition $V = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$ de V en sous-espaces F_i stables par tous les $\rho(g)$ et tels que $\forall i, \rho_i : g \in G \mapsto \rho(g)|_{F_i}$ est irréductible.

Nous allons voir que ce théorème peut être étendu au cas où G est un groupe compact. Le principe de la démonstration reste le même : on se ramène au cas où les $\rho(g)$ sont orthogonaux puis on conclue par récurrence sur la dimension de V. La difficulté réside dans la preuve de l'existence d'un produit scalaire conservé par les $\rho(g)$.

On cherche pour cela une forme quadratique q_f telle que $q_f \circ \rho(g) = q_f$ pour tout g de G avec q_f définie positive dans le cas réel et q_f hermitienne définie positive dans le cas complexe.

On étudie dans la suite le cas réel mais le résultat peut être aisément étendu au cas complexe en munissant le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des forme hermitiennes définies positives de sa structure induite de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

L'application q_f recherchée est un point fixe commun à tous les $q \mapsto q \circ \rho(g)$ pour g dans G. Pour trouver q_f, on applique alors le théorème de point fixe commun suivant :

Théorème

> Soit H un sous-groupe compact de $\mathcal{GL}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$-espace-vectoriel de dimension finie.
> Si K est un compact convexe non vide de E stable par tous les éléments de H, alors K contient un point fixe commun à tous les éléments de H

Démonstration.
On raisonne par l'absurde en supposant que H n'a aucun point fixe dans K. Pour tout x de K, il existe donc $h \in H$ tel que $h(x) \neq x$, ce que l'on peut écrire $K = \bigcup_{h \in H} \Omega_h$ avec $\Omega_h = \{x \in K \mid h(x) \neq x\}$.
Les Ω_h étant ouverts et K compact, la propriété de Borel-Lebesgue indique qu'il existe un nombre fini p de $h_i \in H$ tels que $K = \bigcup_{i=1}^{p} \Omega_{h_i}$

On pose ensuite $f = \frac{1}{p}(h_1 + \cdots + h_p)$. K est convexe et stable par les h_i donc f stabilise K. On utilise alors le lemme suivant :

Lemme Un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ admet un point fixe dans tout compact qu'il stabilise.

f possède donc un point fixe α dans K.
On introduit également la norme suivante : $N(x) = \sup_{h \in H} \|H(x)\|$. Les $h \in H$ sont des isométries pour cette norme et d'autre part elle est strictement convexe. Cela provient du fait que H est compact et $h \mapsto h(x)$ est continue sur $\mathcal{L}(E)$ donc ce sup est atteint.

On a vu que $\alpha = \frac{1}{p}(h_1(\alpha) + \cdots + h_p(\alpha))$. On a alors

$$pN(\alpha) \leq N(h_1(\alpha)) + N(h_2(\alpha) + \cdots + h_p(\alpha)) \leq N(\alpha) + \cdots + N(\alpha) \leq pN(\alpha)$$

Il y a égalité donc en particulier $h_1(\alpha)$ et $h_2(\alpha) + \cdots + h_p(\alpha)$ sont positivement liés c'est-à-dire que $h_2(\alpha) + \cdots + h_p(\alpha) = \lambda h_1(\alpha)$ avec $\lambda \geq 0$ (ou alors $h_1(\alpha) = 0$ et donc $\alpha = 0$). On a alors $\alpha = \frac{1+\lambda}{p} h_1(\alpha)$. Or, $N(\alpha) = N(h_1(\alpha))$ donc $|1 + \lambda| = 1 + \lambda = p$ et ainsi $h_1(\alpha) = \alpha$.
Cela contredit l'hypothèse de départ et il existe donc un point fixe commun à tous les $h \in H$.

□

$\rho(G)$ étant un groupe, l'ensemble Γ des $q \mapsto q \circ \rho(g)$ est aussi l'ensemble des $f(g) : q \mapsto q \circ \rho(g)^{-1}$. On définit ainsi un morphisme continu de groupes $f : G \to \mathcal{GL}(\mathcal{Q})$ et donc $\Gamma = f(G)$ est un sous-groupe de $\mathcal{GL}(\mathcal{Q})$. D'autre part, comme f est continue et G compact, Γ est compact.

Pour pouvoir appliquer le théorème de point fixe commun précédent, il faut déterminer un ensemble K compact convexe de formes quadratiques définies positives qui soit stable par tous les éléments de Γ, c'est-à-dire tous les $f(g)$.

Une famille simple d'ensembles stables par tous les éléments de Γ est la famille des orbites d'éléments de $\mathcal{Q}$ sous l'action de Γ, i.e. les $O(q) = \{f(g)(q) \mid g \in G\}$ où q est fixé dans $\mathcal{Q}$.

En choisissant q_0 définie positive, $O(q_0)$ est un ensemble de formes quadratiques définies positives.
En effet, pour $g \in G$ et $x \neq 0$, $\rho(g)^{-1}(x) \neq 0$ car $\rho(g)^{-1}$ est inversible et donc $f(g)(q_0)(x) = q_0(\rho(g)^{-1}(x)) > 0$
Donc $f(g)(q_0)$ est définie positive.

De plus, $O(q_0)$ est compact car c'est l'image de Γ par l'application $u \in \mathcal{L}(\mathcal{Q}) \mapsto u(q_0)$ qui est continue.

Afin de remplir la condition de convexité, on considère l'enveloppe convexe K de $O(q_0)$. Il est cependant nécessaire de vérifier de nouveau la stabilité de K par tous les $f(g)$, sa compacité ainsi que son inclusion dans l'ensemble des formes quadratiques définies positives.

La compacité de K est assurée par le théorème suivant :

Théorème *(de Caratheodory)*

Dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, l'enveloppe convexe d'un compact est compacte.

Démonstration.
Soient $\mathcal{A}$ un compact d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie p et $\mathcal{E}(\mathcal{A})$ son enveloppe convexe.

$\star$ *Tout point de $\mathcal{E}(\mathcal{A})$ peut s'écrire comme barycentre de $p+1$ points de $\mathcal{A}$:*
En effet, considérons $x \in \mathcal{E}(\mathcal{A})$.
Il existe un entier d, des points a_i de $\mathcal{A}$ et des coefficients λ_i positifs tels que $x = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i a_i$ et $\sum_{i=1}^{d} \lambda_i = 1$
Si $d \leq p+1$, on peut ajouter à cette somme des termes nuls afin d'en avoir $p+1$.
Sinon, la famille $((a_1, 1), \ldots, (a_d, 1))$ est liée puisqu'elle contient plus d'éléments que la dimension de $E \times \mathbb{R}$.
Il existe alors une famille de réels non tous nuls $(\mu_1, \ldots, \mu_d)$ tels que $\sum_{i=1}^{d} \mu_i a_i = 0$ et $\sum_{i=1}^{d} \mu_i = 0$.
On a donc $\forall t \in \mathbb{R}, x = \sum_{i=1}^{d} (\lambda_i + t\mu_i) a_i$ et $\sum_{i=1}^{d} (\lambda_i + t\mu_i) = 1$
On choisi ensuite pour valeur de t le maximum atteint pour l'indice i_0 des $-\lambda_i/\mu_i$ où $\mu_i \neq 0$ de sorte que les coefficients soient tous positifs et que l'un soit nul. Il en découle que $x = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{d} (\lambda_i + t\mu_i) a_i$ est barycentre de $d-1$ points de $\mathcal{A}$ et la valeur minimale de d est donc inférieure à $p+1$.

L'enveloppe convexe de $\mathcal{A}$ est donc $\mathcal{E}(\mathcal{A}) = \{\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i a_i \mid a_i \in \mathcal{A}, \lambda_i \in \mathbb{R}_+, \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i = 1\}$

$\star$ *$\mathcal{E}(\mathcal{A})$ est compact :*
L'ensemble $T = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_{p+1}) \in (\mathbb{R}_+)^{p+1} \mid \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i = 1\}$ est un compact de $\mathbb{R}^{p+1}$.
$\mathcal{E}(\mathcal{A})$ est l'image de $T \times \mathcal{A}^{p+1}$ par l'application continue $(\overrightarrow{\lambda}, \overrightarrow{a}) \in \mathbb{R}^{p+1} \times \mathcal{A}^{p+1} \mapsto \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i a_i$. $\mathcal{A}$ étant compact, $T \times \mathcal{A}^{p+1}$ l'est également et donc $\mathcal{E}(\mathcal{A})$ est compact. $\square$

Les éléments de K sont des formes quadratiques définies positives car ce sont des barycentres de formes quadratiques définies positives $f(g_i)(q_0)$.

Pour finir, K est stable par tous les $f(g)$. En effet, si $q = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(g_i)(q_0)$, alors
$f(g)(q) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(g)(f(g_i)(q_0)) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(g \circ g_i)(q_0) \in K$.

On a donc réuni les hypothèses du théorème de point fixe commun. On peut alors en conclure qu'il existe une forme quadratique q_f de K, donc définie positive, telle que $\forall g \in G, f(g)(q_f) = q_f$, c'est-à-dire que l'on peut trouver un produit scalaire pour lequel les $\rho(g)$ sont orthogonaux.
La fin da la démonstration du théorème de décomposition est exactement la même que pour le théorème de Maschke : on raisonne par récurrence sur la dimension en exploitant le fait que si un sous-espace est stabilisé par un automorphisme orthogonal, son orthogonal l'est aussi. On obtient ainsi le résultat suivant :

Théorème

Si G est un groupe compact, pour toute représentation $\rho : G \to \mathcal{GL}_{\mathbb{K}}(V)$, il existe une décomposition $V = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$ de V en sous-espaces F_i stables par tous les $\rho(g)$ et tels que $\forall i, \rho_i : g \in G \mapsto \rho(g)|_{F_i}$ est irréductible.

2 Application au cas de $\mathcal{SO}_2$

L'intérêt de ce théorème est de simplifier la description des représentations linéaires. En effet, il suffit de déterminer les représentations irréductibles pour pouvoir en déduire les autres. On voit que l'on peut même se limiter à un changement de base près à l'étude des représentations à valeur dans le groupe orthogonal.

On prend ici pour exemple un groupe compact non fini simple : $\mathcal{SO}_2$. Il peut être décrit comme l'ensemble des matrices de rotation $R(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$.

Analysons une représentation linéaire $\rho : \mathcal{SO}_2 \to \mathcal{O}_m(\mathbb{R})$ irréductible.
L'application $t \mapsto R(t)$ étant un morphisme continu de $(\mathbb{R}, +)$ dans $\mathcal{SO}_2$, on étudie plutôt $\varphi = \rho \circ R$.

Notons tout d'abord que l'étude de $F(t) = \int_t^{t+a} \varphi(s)ds$ permet de montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$. On sait ensuite que $\forall t, u \in \mathbb{R},\ \varphi(t+u) = \varphi(t)\varphi(u)$ donc en dérivant cette expression par rapport à t, $\varphi'(t+u) = \varphi'(t)\varphi(u)$. Ainsi, en prenant $t = 0$ on peut voir que φ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $\varphi(t) = \varphi'(0)\varphi(t)$ et donc que $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) = \exp(tA)$ où $A = \varphi'(0)$.

Un sous-espace stable par A est également stable par tous les $\exp(tA) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(tA)^n}{n!}$ car en dimension finie tout sous-espace est fermé. Donc si A admet un sous-espace stable, ce sous-espace est stable pour tous les $\rho(R(t))$. Or ρ est irréductible donc un tel sous-espace est soit $\{0\}$ soit $\mathbb{R}^m$. D'autre part, tout automorphisme réel possède un plan ou une droite stable. Cela signifie donc que $\mathbb{R}^m$ est $\{0\}$, un plan ou une droite, i.e. $m = 0, 1$ ou 2.

Comme $\varphi(t) \in \mathcal{O}_m(\mathbb{R})$, A est antisymétrique. En effet, $\forall t \in \mathbb{R}, {}^t(\exp(tA))\exp(tA) = I_m$, ce qui donne en dérivant ${}^tA{}^t(\exp(tA))\exp(tA) + {}^t(\exp(tA))\exp(tA)A = 0$ et une évaluation en $t = 0$ montre alors que $A + {}^tA = 0$.

Finalement, pour $m = 1, A = (0)$ et pour $m = 2, A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$.
Dans le second cas, la 2π-périodicité de $t \mapsto R(t)$ impose que $a \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement, si $\rho(R(t)) = (1)$ ou $\rho(R(t)) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{Z}$, ρ est bien une représentation continue irréductible et on a donc déterminé toutes les représentations réelles orthogonales irréductibles de $\mathcal{SO}_2$. Ce sont les $R(t) \mapsto u(t)$ où il existe une base telle que la matrice de $u(t)$ pour tout t est diagonale par bloc du type (1) ou $\begin{pmatrix} \cos at & \sin at \\ -\sin at & \cos at \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{Z}$.

3 Étude d'une famille de représentations de $\mathcal{SU}_2$

J'ai cherché à construire une représentation ρ_m irréductible de $\mathcal{SU}_2$ dans un espace de dimension m donnée. $\mathcal{SU}_2$ agissant naturellement sur les vecteurs de $\mathbb{C}^2$, il est naturel de chercher une représentation dans un espace de fonctions de deux variables complexes qui serait telle que $\rho_m(A)(f)(x,y) = f(A^{-1}(x,y))$ (l'inversion de A permettant de bien avoir un morphisme). J'ai donc considéré l'ensemble V_m des polynômes complexes homogènes de degré m à deux indéterminés et posé pour $A \in \mathcal{SU}_2$ et $P \in V_m$, $\rho_m(A)(P) = P(A^{-1}(X,Y))$.

Pour montrer que la représentation ainsi construite est irréductible, on considère un sous-espace non nul F de V_m stable par tous les $\rho_m(A)$ puis on montre que F contient tous les monômes. V étant non nul, on peut considérer $P = \sum_{k=0}^m c_k X^k Y^{m-k} \in V_m \backslash \{0\}$.

Si $u \in \mathbb{C}$ est de module 1, $D(u) = \begin{pmatrix} \frac{1}{u} & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \in \mathcal{SU}_2$ et donc $\rho_m(D(u))(P) = \sum_{k=0}^m c_k u^{2k-m} X^k Y^{m-k}$ est dans V_m. En choisissant des u_j de carré deux à deux distincts, le déterminant du système $\sum_{j=0}^m \lambda_j (u_j^2)^k = a_k$ est un déterminant de Vandermonde non nul et donc il existe des λ_j tels que $\sum_{j=1}^m \lambda_j \rho_m(D(u_j))(P) = c_k X^k Y^{m-k}$.

Quitte à remplacer P par $\rho_m(R(t))(P)$ pour une valeur bien choisie de t, on peut supposer c_k non nul et donc $X^k Y^{m-k} \in V_m$ quel que soit $k \in \{0, \ldots, m\}$.

On a donc trouvé une représentation irréductible de $\mathcal{SU}_2$ de tout degré.

4 Passage au quotient et représentations de $\mathcal{SO}_3$

4.1 De $\mathcal{SU}_2$ à $\mathcal{SO}_3$

Lemme $\mathcal{SO}_3$ est isomorphe au quotient de $\mathcal{SU}_2$ par $\{\pm I_2\}$.

Pour montrer ce lemme, on utilise plutôt que $\mathbb{R}^3$ un espace sur lequel $\mathcal{SU}_2$ agit facilement donc un espace de matrices de taille 2 de $\mathbb{R}$-dimension 3 : l'espace des matrices hermitiennes de trace nulle $\mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y+iz \\ y-iz & -x \end{pmatrix}, (x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\}$. On munit $\mathcal{H}$ du produit scalaire $< h, h' >= Tr(h^* h')$.

On introduit ensuite le morphisme de groupes $\Phi : A \in \mathcal{SU}_2 \mapsto C_A \in \mathcal{GL}(\mathcal{H})$ où $C_A : h \in \mathcal{H} \mapsto AhA^{-1}$.

$\star$ Φ *est surjective sur* $\mathcal{SO}(\mathcal{H})$ *:*
$\forall h \in \mathcal{H}, < C_A(h), C_A(h) >= Tr((A*)^{-1} h^* A^* A h A^{-1}) = Tr((A*)^{-1} h^* h A^{-1}) =< h, h >$ donc $C_A \in \mathcal{O}(\mathcal{H})$. De plus $\mathcal{SU}_2$ est connexe par arcs et $\det \circ \Phi$ est continue à valeurs dans $\{\pm 1\}$ donc $\forall A \in \mathcal{SU}_2, \det \Phi(A) = \det \Phi(I_2) = 1$. Ainsi, Φ est à valeurs dans $\mathcal{SO}(\mathcal{H})$.

Φ est surjective car les $\Phi(R(t))$ sont les rotations dans le plan $z = 0$, les $\Phi(D(u))$ pour u unitaire sont les rotations dans le plan $x = 0$ et que l'on peut ensuite construire toutes les rotations de $\mathcal{H}$ à partir de celles-ci à l'aide des angles d'Euler par exemple.

$\star$ *Le noyau de* Φ *est* $\{\pm I_2\}$ *:*
Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \in \mathcal{SU}_2$ avec $|a|^2 + |b|^2 = 1$ telle que $\forall h \in \mathcal{H}, AhA^{-1} = h$. En particulier pour $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, on trouve $AhA^{-1} = \begin{pmatrix} |a|^2 - |b|^2 & 2a\overline{b} \\ 2\overline{a}b & |b|^2 - |a|^2 \end{pmatrix}$ et donc $|a| = 1$ et $|b| = 0$. En prenant ensuite $h = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on obtient que $a^2 = 1$ et donc $A = \pm I_2$.

4.2 Représentations de $\mathcal{SO}_3$

Pour que ρ_m soit une représentations de $\mathcal{SO}_3$ par l'intermédiaire de Φ, $\rho_m(A)$ doit être invariante par changement de A en $-A$ pour toute matrice A de $\mathcal{SU}_2$. En particulier, on doit avoir pour tout $P \in V_m, P(X,Y) = P(-X,-Y)$ et donc m est pair. Les représentations ρ_m passant au quotient sont donc celles de degré impair (V_m étant de dimension $m+1$).

Il n'existe en fait pas de représentation de $\mathcal{SO}_3$ de degré pair, bien que je n'en ai pas étudié les raisons exactes. On a ainsi déterminé les décompositions irréductibles de représentations de $\mathcal{SO}_3$.

Bibliographie

– R. Antetomaso. « Un théorème de point fixe en dimension finie ; application aux sous-groupes compacts de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ », *RMS* 2, Octobre 1993.

– D. V. Vedensky. « Chapitre 8 : Irreducible Representations of SO(2) and SO(3) », *Group Theory*, 2001 (http ://www.cmth.ph.ic.ac.uk/people/d.vvedensky/groups/Chapter8.pdf [dernière consultation le 10 juin 2013])

– Wikipedia (en). « Special unitary group » (http ://en.wikipedia.org/wiki/Special_unitary_group [dernière consultation le 10 juin 2013])